Modellove ved fysiske modelforsøg

Christian Aage
Docent, ph.d.
Danmarks Tekniske Universitet – Maritim Teknik

Abstract: Selv om fysiske modelforsøg inden for strømningsmekanikken har været udført i århundreder, er det først inden for de sidste godt og vel hundrede år, at man har kunnet uddrage fornuftige konklusioner af forsøgene og omsætte måleresultaterne til pålidelige fuldskaladata. Med udgangspunkt i den historiske udvikling af fysiske modelforsøg på skibsområdet gennemgås udviklingen og systematiseringen af de generelle modellove.

1. Indledning

En model er et billede af virkeligheden, som har visse væsentlige egenskaber fælles med den undersøgte prototype, mens andre egenskaber er forskellige. En model kan være en fysisk genstand udsat for fysiske påvirkninger, eller den kan være af rent tankemæssigt, immaterielt indhold, som for eksempel en matematisk eller en numerisk model. En fysisk model kan indeholde en række af prototypens vigtigste egenskaber, for eksempel relativ geometrisk form, massefordeling og bølgeforhold i et modelbassin, mens andre egenskaber, som absolut størrelse, byggematerialer og sejlhastighed med vilje er valgt anderledes end for prototypen. Herved kan der opnås store besparelser i tid og penge, og forsøgene kan flyttes ind i et laboratorium, hvor de fysiske omgivelser kan styres.

Overordnet set ønsker man i et modelforsøg at overholde ligedannethedsprincippet *"the principle of similitude"* i så høj grad som muligt, eller med andre ord at overholde de *modellove*, som er relevante for det pågældende problem. Ligedannethedsprincippet kan formuleres som en overensstemmelse mellem de nondimensionale kombinationer af variable, der har betydning for det pågældende fysiske fænomen, de såkaldte *modeltal*. Ved dimensionsanalyse kan man opstille alle de nondimensionale modeltal, som er teoretisk mulige for en given fysisk proces. Denne metode er systematiseret af Buckingham (1914) i det såkaldte Pi-teorem. Men hvis man opsøger alle de mulige nondimensionale modeltal, som kan dannes på basis af alle de parametre, der kunne tænkes at indgå i en given fysisk proces, kan man komme op på et meget stort antal, hvoraf de fleste vil være uden væsentlig betydning. Man må derfor generelt foretage en sortering baseret på fysisk indsigt og erfaring.

Denne artikel omhandler hovedsagelig fysiske modelforsøg, og i særdeleshed de hydro- og aerodynamiske modelforsøg, modellove og modeltal, der finder anvendelse indenfor skibs-, offshore- og bygningsområdet. Hydro- og aerodynamiske modelforsøg har historisk set været nøglen til forståelsen af strømningsmekanikken, og modelforsøg er stadig et uvurderligt værktøj i forskningsmæssig og industriel sammenhæng. I dette foredrag gennemgås den grundlæggende teori for sådanne forsøg. Metoder til omregning af modelresultater til fuld skala beskrives, og skalaeffekter diskuteres.

Det skal nævnes, at modellovene også kan anvendes ved sammenligning af fuldskalakonstruktioner af forskellig størrelse, for eksempel ved omregning af fuldskalamålinger fra et mindre skib til et større.

2. Historisk baggrund

Modelforsøg med skibe er beskrevet i den videnskabelige litteratur helt tilbage til 1600-tallet, og forsøg med modelskibe har utvivlsomt været udført på amatørplan i årtusinder. Seriøse videnskabelige modelforsøg blev i 1700-tallet udført i bassiner, der i størrelse nærmer sig vore dages laboratoriebassiner. Som regel blev modstandsforsøg udført som sammenlignende forsøg mellem alternative udformninger af et givet skib. Men selv om datidens største videnskabsmænd blev inddraget i forsøg på en teoridannelse og tolkning af sådanne eksperimenter, der selvsagt havde stor strategisk og økonomisk betydning, måtte man generelt erkende, at der tilsyneladende ikke var nogen entydig sammenhæng mellem modelforsøgsresultaterne og skibenes præstationer.

Så sent som i 1870 konstaterede den kendte skibsbygger og hydrodynamiker J. Scott Russell om skibsmodstandsmålinger, at *"the results on a large scale, were precisely the contrary to the results on a small scale."* Bemærkningen faldt i en diskussion i The Institution of Naval Architects i England (Merrifield, 1870), hvor William Froude måtte forsvare sine planer for en skibsmodeltank, som han samme år havde fået støtte til fra det britiske admiralitet. Froude havde i 1868 ved teoretiske overvejelser og nogle forholdsvis enkle forsøg fundet løsningen på modelforsøgsgåden (Froude, 1868). Nogle få år senere, da Froude ikke alene havde udført en række epokegørende modelforsøgsserier i sin nybyggede modeltank i Torquay, men også havde eftervist sin analysemetodes rigtighed ved de berømte *"Greyhound"* fuldskalaforsøg (Froude, 1874), var hele den maritime verden blevet overbevist om værdien af skibsmodelforsøg, og i løbet af nogle årtier havde alle skibsfartsnationer bygget modeltanke efter Froude's forbillede. Danmark fik dog som det sidste land i Skandinavien først sin skibsmodeltank i Hjortekær i 1959 efter Professor C.W. Prohaskas mangeårige forarbejde.

Froude's geni bestod i, at han i modsætning til alle sine forgængere erkendte, dels at modelforsøget for at give mening måtte udføres ved en hastighed, der sikrer ligedannethed af bølgesystemerne, og dels at skibets modstand består af flere fysisk meget forskellige komponenter: bølgemodstand, friktionsmodstand og trykmodstand, der *ikke* kan omfattes af en fælles skalafaktor. Froude's metode var da at måle og adskille disse komponenter i modelskala, at omregne dem hver for sig til skibsskala efter love, som han selv først måtte finde, og derefter igen sammensætte komponenterne til skibets modstand. En anden vigtig del af Froude's begavelse var hans evne til at konstruere og med egne hænder bygge alle de maskiner, modeller og måleapparater, såvel i modelskala som i fuld skala, der var nødvendige for gennemførelsen af hans forsøg.

Froude's klare forståelse af skibsmodstandens fysik var et større gennembrud, end man i dag forestiller sig. På hans tid var den almindelige opfattelse af skibsmodstand, også blandt lærde folk, hentet fra analogi med en plov, der trækkes gennem jord. Modstanden mentes at stamme fra den kraft, der skulle til for at skubbe vandet til side, således at skibet kunne få plads til at bevæge sig frem i den derved skabte plovfure. Denne opfattelse førte naturligt nok til de dampskibe, der kendes fra midten af 1800-tallet, som havde ekstremt spidse og konkave stævne og meget lille bredde, hvilket i øvrigt medførte et stort antal unødvendige skibsforlis på grund af manglende stabilitet.

At der opstår et overtryk ved skibets forstævn var umiddelbart forståeligt for enhver. Men den tanke, at overtrykket kunne omsættes til forøget hastighed langs skibets bund og sider, for så igen (om end med et vist tab) at blive omsat til overtryk ved agterstævnen, var fremmed for den tids skibsbyggere. Man kendte naturligvis Bernoulli's ligning (1738), som forklarer denne energiomsætning. Men på det tidspunkt var der en generel mistillid til den klassiske hydrodynamik, der ofte havde ført til uforståelige resultater, eksempelvis d'Alembert's paradoks (1768), som forudsiger modstanden nul på et vilkårligt legeme neddykket i en strømmende *ideal* væske, hvilket er teoretisk korrekt, men i klar modstrid med erfaringen fra *virkelige* væsker. Praktiske skibsbyggere og hydrodynamikere havde derfor i årevis følt sig henvist til at bygge skibe efter teoretisk svagt funderede håndregler baserede på fuldskalaerfaringer.

3. Froude's lov historisk

Bølgemodstanden måtte ifølge Froude bestemmes ved en hastighed, hvor modellens bølgedannelse var ligedannet med skibets, samtidig med, at bølgesystemerne skulle være stationære set fra fartøjet, det vil sige bevæge sig med samme hastighed som henholdsvis model og skib, som erfaringen viser, at skibsbølger gør. Bølgers udbredelseshastighed c på dybt vand er givet ved formlen:

$$c = \sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\pi}} \tag{1}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen og λ er bølgelængden, og denne formel var velkendt på Froude's tid. Da bølgelængderne på grund af ligedannethedsbetingelsen måtte forholde sig som længderne af henholdsvis model og skib, kunne han derfor konkludere, at hastighederne ved *"corresponding speeds"* måtte forholde sig som kvadratroden af skalaforholdet, således at:

$$\frac{V_M}{\sqrt{L_M}} = \frac{V_S}{\sqrt{L_S}} \tag{2}$$

Hvor indeks $_M$ står for model og $_S$ for skib. Dette *"speed-length ratio"* med hastigheden V i knob og fartøjets længde L i fod foretrækkes stadig af en del skibsbyggere af traditionsmæssige grunde. Vi skal nedenfor udlede det nondimensionale Froude-tal, som generelt bruges i dag. Ved disse hastigheder ville modstandene så ifølge Froude forholde sig som fartøjernes vægte, det vil sige som skalaforholdet i tredje potens. Denne vigtige *"Law of Comparison"* kaldes i dag Froude's lov. Oprindelig havde Froude regnet med, at hele modstanden ville følge denne lov, men han erkendte tidligt efter teoretiske overvejelser og omhyggeligt udførte forsøg, at friktionsmodstanden fulgte andre love.

Froude's udledelse af den modelhastighed, som giver den korrekte bølgedannelse, var et gennembrud for modelforsøgsteknikken. På Froude's tid var det en udbredt opfattelse, at modellerne skulle slæbes med skibshastighed, og det gav naturligt nok anledning til fejlkonstruktioner, da selv simple sammenligningsforsøg mellem to modeller kan give meget misvisende resultater, når hastighederne er forkerte.

Det bør nævnes her, at franskmanden F. Reech allerede i 1832 fremsatte ovennævnte lovmæssighed for hastigheder og modstande af flydende legemer, men uden i øvrigt at udnytte denne erkendelse til noget praktisk formål. Froude's lov kaldes derfor undertiden Froude-Reech's lov.

Friktionsmodstanden kunne man på Froude's tid ikke beregne, men det var almindelig accepteret, at den var proportional med hastighedens kvadrat og med overfladearealet. Også på dette punkt leverede Froude den nytænkning, som var nødvendig, for at hans modelforsøgsteknik kunne blive en succes. Han argumenterede for, at friktionsmodstanden voksede mindre end hastighedens kvadrat, idet hastigheden langs den våde overflade måtte blive nedbremset, således at de agterste dele af overfladen mærkede en mindre friktionsmodstand end de forreste. Denne intuitive forløber for grænselagsteorien vakte også en del modstand blandt datidens eksperter, men Froude kunne eftervise sin hypotese ved hjælp af systematiske serier af slæbeforsøg med tynde ferniserede træplader af varierende længde op til 50 fod. Herved fik han samtidig etableret det sæt af friktionsmodstandskurver, som gjorde det muligt for ham med forbavsende nøjagtighed at *ekstrapolere* friktionsmodstanden helt op til skibsstørrelse. I dag regner vi som regel friktionsmodstanden som værende proportional med hastighedens kvadrat, men korrigerer så for nedbremsningen i grænselaget ved hjælp af variable friktionsmodstandskoefficienter.

Trykmodstanden, som Froude kaldte hvirvelmodstand *(eddy-making resistance)*, antog han ville følge samme skalafaktor som bølgemodstanden, dvs. tredje potens af det lineære skalaforhold.

Froude's metode var at udføre modelforsøg med to modeller af skibet, den ene en normal tredimensional skalamodel, den anden en tynd ferniseret træplade af samme længde og samme våde overflade som den første model. Modstanden på den første model var da den totale modelmodstand R_T, mens modstanden på den anden model var den rene friktionsmodstand R_F. Forskellen mellem disse, der bestod af bølgemodstand og i mindre omfang af trykmodstand, benævnte han restmodstanden R_R *(residuary resistance)*. Omregningen til skibsskala foregik som nævnt ved, at restmodstanden blev multipliceret med skalaforholdet i tredje potens, mens skibets friktionsmodstand blev fundet ved ekstrapolation af Froude's systematiske friktionsmodstandskurver.

Denne metode bruges stadig i dag, dog med den modifikation, at man beregner friktionsmodstanden i stedet for at måle den. Efter utallige friktionsforsøg med plader af varierende størrelse og ved varierende hastighed har man været i stand til at sammenfatte de målte friktionsmodstande i nondimensionale friktionslinier. Mest kendte er Schoenherr's friktionslinie (1932) og ITTC-1957 linien, der begge med stor nøjagtighed angiver friktionsmodstanden på plane flader med turbulent grænselag, såvel i modelskala som i skibsskala.

I erkendelse af, at også friktionsmodstanden i nogen grad afhænger af skibsskrogets form, kan man efter G. Hughes' (1954) forslag, i dag benævnt ITTC-1978 metoden, indføre formfaktorer som en tilpasning af den grundlæggende friktionslinie til den aktuelle skibsform.

4. Froude's lov generelt

Froude's lov er oprindelig udledt specifikt til brug ved skibsmodelforsøg. Den udtrykker, at bølgesystemerne omkring model og skib skal være ligedannede, og da overfladebølger er bestemt af inertikræfter og tyngdekræfter, er det med andre ord forholdet mellem disse, der skal være ens. Denne modellov har imidlertid generelle anvendelser, der går langt udover skibsmodstandsforsøg.

Froude's lov gælder for alle typer af skibs- og offshoreforsøg, hvor inertikræfter og tyngdekræfter dominerer, det vil sige ved forsøg med overfladebølger, herunder selvfremdrivningsforsøg, sødygtighedsforsøg og bølgebelastningsforsøg. Men også havne- og kystforsøg med bølger og andre hydrauliske forsøg med floder og vandløb, vandfald og vandkraftværker er omfattet af Froude's lov. Ved overfladebølger forstås her generelt bølger på grænsefladen mellem to fluider af forskellig massefylde, således også mellem saltvand og ferskvand eller mellem to luftlag i atmosfæren.

En lang række tekniske forsøg med faste legemer, hvor inerti og tyngde dominerer, er styret af Froude's lov, eksempelvis dynamiske forsøg med bygninger, huse, tårne, broer og transportmidler, samt visse ballistiske forsøg.

Også i biologisk og palæontologisk forskning har Froude's lov spillet en vigtig rolle. Det har vist sig, at landlevende dyrs kropsmål og deres skridtlængde sat i forhold til deres hastighed i gang og løb kan systematiseres ved hjælp af Froude's lov. Og ved at anvende samme analysemetode på forstenede fortidsdyr har man kunnet bestemme, hvor hurtigt de forskellige arter af dinosaurer har været i stand til at gå eller løbe (R.M. Alexander, 1976).

Tidsskalaen i Froude's lov har betydning ved filmoptagelser af modelforsøg. Hvis en model-forsøgsfilm skal kunne illudere naturligt fuldskalatempo ved normal fremvisningshastighed (24 billeder per sekund for film, 25 billeder per sekund for TV), skal modelforsøget filmes med highspeed kamera ved en billedhastighed, der svarer til tidsskalaen (se nedenfor). Dette gælder såvel tekniske forsøg som spillefilmoptagelser med eksempelvis modeller af synkende skibe, væltende tog eller sammenstyrtende huse.

Udledelsen af Froude's lov kan foretages på mange måder. Vi vil her tage udgangspunkt i strømningsmekanikken, men mere generelt end Froude selv gjorde det, idet vi blot udtrykker, at inerti- og tyngdekræfter skal have samme forhold for model og prototype. Et mål for en væskes inerti er første led i Bernoulli's ligning, det dynamiske tryk, der som bekendt udtrykker væskens kinetiske energi per rumfangsenhed. Det dynamiske tryks virkning på et vilkårligt areal A giver en inertikraft. Tilsvarende finder vi tyngdekraften som virkningen af tyngdeaccelerationen g på et vilkårligt væskevolumen ∇ med massefylden ρ. Modelstørrelser betegnes med indeks $_M$, mens prototypestørrelser betegnes med indeks $_P$.

$$\begin{aligned}
\frac{inertikraft_M}{tyngdekraft_M} &= \frac{inertikraft_P}{tyngdekraft_P} \\
\frac{½\rho_M V_M^2 A_M}{g_M \rho_M \nabla_M} &= \frac{½\rho_P V_P^2 A_P}{g_P \rho_P \nabla_P} \\
\frac{V_M^2}{g_M L_M} &= \frac{V_P^2}{g_P L_P} \\
\frac{V_M}{\sqrt{g_M L_M}} &= \frac{V_P}{\sqrt{g_P L_P}} \\
Fr_M &= Fr_P
\end{aligned} \qquad (3)$$

Ifølge ISO-standard skrives det dimensionsløse Froude-tal som Fr. I skibssammenhæng benyttes dog ofte det ældre symbol F_n. I skibssammenhæng er det ligeledes normalt at erstatte indeks $_P$ med et $_S$ for skib. Længden L er en for det pågældende forsøg karakteristisk længde, ved skibsmod-standsforsøg på dybt vand skibets vandlinielængde L_w.

Man ser, at massefylden ρ ikke indgår i Froude's tal. Det betyder, at man kan udføre Froude-relaterede modelforsøg i en vilkårlig væske. Man kan eksempelvis benytte ferskvand i stedet for saltvand og stadig få det korrekte *forhold* mellem inerti- og tyngdekræfter. Men ved beregning af kræfternes *absolutte* størrelse må man dog tage hensyn til de aktuelle massefylder.

5. Skalaforhold ifølge Froude's lov

Når forholdet mellem inerti- og tyngdekræfter er det samme for model og prototype, følger heraf skalaforholdet for alle andre variable. I skibsmodelforsøg er det lineære skalaforhold α traditionelt forholdet mellem prototypelængde og modellængde, det vil sige:

$$\frac{L_P}{L_M} = \alpha \tag{4}$$

hvor altså normalt $\alpha > 1$ (idet der dog findes modelforsøg, hvor modellen med fordel kan gøres større end prototypen).

En direkte følge af den grundlæggende forudsætning i Froude's lov er, at alle accelerationer forholder sig som tyngdeaccelerationerne. Hvis vi for nemheds skyld antager, at tyngdeaccelerationerne g for model og prototype er omtrent ens uanset stedet på jordkloden, må alle andre accelerationer a også nødvendigvis skaleres ens, det vil sige:

$$\frac{a_P}{a_M} = \frac{g_P}{g_M} = 1 \tag{5}$$

En logisk følge heraf er, at både tid t og hastighed V må skaleres som kvadratroden af det lineære skalaforhold:

$$\frac{t_P}{t_M} = \frac{V_P}{V_M} = \sqrt{\alpha} \tag{6}$$

Kræfterne F, der ifølge Newton's anden lov er produktet af masse og acceleration, må da forholde sig som masserne af tilsvarende væskevolumener, det vil sige:

$$\frac{F_P}{F_M} = \frac{\rho_P}{\rho_M}\frac{\nabla_P}{\nabla_M} = \frac{\rho_P}{\rho_M}\alpha^3 \tag{7}$$

Herefter kan alle øvrige skalaforhold udledes. En samlet oversigt findes i Tabel 1.

6. Reynolds' lov historisk

At der er friktionsmodstand i tyktflydende væsker er åbenlyst for enhver, der har prøvet at trække en kniv på langs gennem væsker som honning, tjære eller tyk olie. Men at også de mest letflydende fluider som vand og luft har en viskositet, der har en altafgørende betydning for strømningsmodstanden på legemer neddykket i fluiden, er ikke umiddelbart indlysende. Således var det indtil langt op i 1800-tallet en almindelig accepteret antagelse i den klassiske hydrodynamik, at man uden mærkbare fejl kunne se bort fra alle viskose effekter i væsker som vand. At det netop var denne tilsyneladende meget rimelige antagelse, der var skyld i de mest iøjnefaldende fejl, hvoraf d'Alembert's paradoks nok er det mest kendte (se ovenfor), blev i realiteten først opklaret af Ludwig Prandtl (1904) i hans banebrydende grænselagsteori.

Viskositeten har såvel en direkte som en indirekte virkning på strømningsmodstanden. Viskositetens *direkte* virkning er *friktionsmodstanden*, som man mærker langs en fast væg, der er parallel med strømningsretningen, som for eksempel langs et skibs bund og sider. Dette skyldes, at selv den mindste viskositet vil medføre, at det inderste molekyle sidder fast på væggen, den såkaldte "*no-slip condition"*, hvorved der opstår et grænselag med en hastighedsgradient og dermed en forskydningsspænding i væsken nær væggen.

Viskositetens *indirekte* virkning er *trykmodstanden.* Viskositeten forårsager en opbremsning i grænselaget tæt på legemet, som bevirker, at der opstår separation et sted på legemets overflade med efterfølgende hvirveldannelse nedstrøms. Der sker med andre ord en energidissipation ud i væsken, hvorved der ikke er energi nok til helt at genopbygge det samme overtryk bag legemet, som strømningen har frembragt på forsiden. Den samlede virkning af denne usymmetriske trykfordeling er trykmodstanden.

For strømlinede legemer som skibe eller fly er friktionsmodstanden væsentlig større end trykmodstanden. For plumpe legemer som kugler, cylindre eller kasser er omvendt trykmodstanden helt dominerende i forhold til friktionsmodstanden. At gøre et legeme strømlinet betyder med andre ord at minimere trykmodstanden.

Viskositet og friktionsmodstand har beskæftiget forskerne helt tilbage til Isaac Newton, men som nævnt var der udbredt enighed om, at disse størrelser i vand og luft var ubetydelige. M. Navier (1826) havde på delvis intuitiv basis opstillet bevægelsesligningerne for væsker inklusive de viskose kræfter. Senere udledte G.G. Stokes (1845) på en mere formelt korrekt måde de samme ligninger, som derfor kaldes Navier-Stokes' ligninger. Men på grund af disse ligningers komplicerede natur kunne de ikke og kan stadig ikke løses matematisk, undtagen i meget specielle tilfælde. Dog er det i de senere år blevet muligt ved anvendelse af meget stor regnekraft at løse Navier-Stokes' ligninger numerisk.

Først med G. Hagen's (1839) og J. Poiseuille's (1841) uafhængige undersøgelser af rørstrømninger fik man teoretiske og eksperimentelle data for viskositetens betydning på dette teknisk vigtige område. G.G. Stokes (1843) var den første, der observerede, at strømninger kan være ustabile, således at den mindste årsag kan skabe en forstyrrelse i strømningen, der akkumuleres nedstrøms. Netop dette fænomen blev grundigt undersøgt af Osborne Reynolds (1883), som opstillede et kriterium for, under hvilke omstændigheder vandets bevægelse ville være *"direct or sinuous"*, senere betegnet som henholdsvis *laminar* eller *turbulent* strømning. Betingelsen for ligedannethed af strømninger blev benævnt Reynolds' *"Law of Similitude"* eller Reynolds' lov.

7. Reynolds' lov generelt

Reynolds' lov udtrykker, at hvis to strømninger i viskose, usammentrykkelige væsker eller luftarter skal være ligedannede, så skal forholdet mellem inertikræfter og friktionskræfter være det samme. Inertikraften udtrykkes igen ved det dynamiske tryks virkning på en vilkårlig flade. Friktionskraften på en vilkårlig flade er ifølge Reynolds proportional med fladens areal A, med væskens dynamiske viskositet μ, og med hældningen af hastighedsprofilet $\partial U/\partial y$ ved væggen, hvor U betegner den lokale hastighed og y er afstanden fra væggen. Denne lovmæssighed går i virkeligheden helt tilbage til Isaac Newton, hvorfor væsker, der følger den, kaldes Newton'ske.

Forholdet mellem den *dynamiske* viskositet μ og massefylden ρ kaldes den *kinematiske* viskositet ν

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu \tag{8}$$

Ved nedenstående udledelse af den generelle Reynolds' lov benytter man, at der overalt er tale om *forhold* mellem sammenlignelige størrelser i to ligedannede strømninger. Når man tilsyneladende kan forkorte eksempelvis to forskellige hastigheder, skyldes det, at forholdet mellem dem er det samme på begge sider af lighedstegnet.

$$\begin{aligned}
\frac{inertikraft_M}{friktionskraft_M} &= \frac{inertikraft_P}{friktionskraft_P} \\
\frac{½\rho_M V_M^2 A_M}{\mu_M \left(\dfrac{\partial U_M}{\partial y_M}\right) A_M} &= \frac{½\rho_P V_P^2 A_P}{\mu_P \left(\dfrac{\partial U_P}{\partial y_P}\right) A_P} \\
\frac{\rho_M V_M L_M}{\mu_M} &= \frac{\rho_P V_P L_P}{\mu_P} \\
\frac{V_M L_M}{\nu_M} &= \frac{V_P L_P}{\nu_P} \\
Re_M &= Re_P
\end{aligned} \tag{9}$$

hvor L er en repræsentativ længde, for et skib vandlinjelængden, for et rør eller en cylinder deres diameter.

En konsekvens af Reynolds' lov er, at modelforsøg kræver hastigheder, der er omvendt proportionale med modelstørrelsen, hvilket er et alvorligt praktisk problem, da man med små modeller meget let i både luft og vand kommer op på overlydshastighed, hvor strømningerne totalt skifter karakter. Afhængigt af prototypens strømningshastighed er der altså en absolut grænse for, hvor lille modellen kan bygges, hvis Reynolds' lov skal opfyldes.

Et andet principielt og uløseligt problem af særlig betydning for skibsmodelforsøg er, at Reynolds' og Froude's modellove ikke kan opfyldes samtidig. Reynolds' lov kræver, at modelhastigheden er større end skibshastigheden, Froude's lov kræver, at modelhastigheden er mindre end skibshastigheden. En logisk men uinteressant løsning er naturligvis et modelforsøg i skala 1:1. En anden løsning kunne være at udføre forsøget i en væske med en viskositet, der er meget mindre end vandets, men en sådan væske findes desværre ikke. I stedet må man ved hjælp af særlige forsøgs- og analyseteknikker korrigere for de *skalaeffekter*, der skyldes de ikke opfyldte modellove. Dette problem diskuteres mere generelt nedenfor.

8. Skalaforhold ifølge Reynolds' lov

Når forholdet mellem inerti- og friktionskræfter er det samme for model og prototype, følger heraf skalaforholdet for alle andre variable. Igen definerer vi det lineære skalaforhold α som forholdet mellem prototypelængde og modellængde, det vil sige:

$$\frac{L_P}{L_M} = \alpha \tag{10}$$

hvor altså normalt $\alpha > 1$ (idet der dog findes modelforsøg, hvor modellen med fordel kan gøres større end prototypen).

Forholdet mellem hastighederne V er umiddelbart givet ved Reynolds' lov:

$$\frac{V_M}{V_P} = \frac{\nu_M}{\nu_P} \frac{L_P}{L_M} = \frac{\nu_M}{\nu_P} \alpha \tag{11}$$

Man ser heraf, at der kan være fordele ved at skifte forsøgsmedium. Da den kinematiske viskositet for vand er omkring 10-15 gange mindre end for luft, kan man eksempelvis ved at udføre vind-belastningsforsøg i vand opnå korrekt Reynolds' tal ved en 10-15 gange lavere hastighed end i luft. En sådan forsøgsteknik forudsætter dog, at man kan undgå bølgeeffekter på vandoverfladen.

I de følgende beregninger forudsættes det for enkelhedens skyld, at *modelforsøgene udføres i prototypemediet*, det vil sige luft/luft eller ferskvand/ferskvand ved samme temperatur. Ifølge Reynolds' lov har man da:

$$V_M = V_P \alpha \tag{12}$$

Skalaforholdet for tiden t kan udledes på følgende måde:

$$\frac{V_M}{V_P} = \frac{L_M}{L_P} \frac{t_P}{t_M} = \frac{1}{\alpha} \frac{t_P}{t_M} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{t_P}{t_M} = \alpha^2 \tag{13}$$

Der er altså ifølge Reynolds' lov en ganske betydelig skalafaktor på tiden, hvilket har stor betydning ved forsøg med strømningsinducerede vibrationer i platforme og broer, hvor man både ved modelbygning og i forsøgsanalysen må tage hensyn til denne skalafaktors virkning på frekvenserne. Også på dette område kan der opstå en uløselig konflikt mellem Reynolds' og Froude's modellove.

Accelerationerne a skaleres ifølge Reynolds' modellov som:

$$\frac{a_P}{a_M} = \frac{L_P}{L_M} \frac{t_M^2}{t_P^2} = \alpha \frac{1}{\alpha^4} = \frac{1}{\alpha^3} \tag{14}$$

Kræfterne F, der ifølge Newton's anden lov er produktet af masse og acceleration, skaleres da på følgende måde, idet vi fastholder forudsætningen om samme strømningsmedium:

$$\frac{F_P}{F_M} = \frac{\rho_P}{\rho_M}\frac{\nabla_P}{\nabla_M}\frac{a_P}{a_M} = \frac{\rho_P}{\rho_M}\alpha^3\frac{1}{\alpha^3} = 1 \tag{15}$$

Ifølge Reynolds' modellov skal hastigheden altså øges så meget i modelforsøget, at *kræfterne* bliver de samme som for prototypen. Alene dette forhold viser, at modelforsøg på skibe, offshore-konstruktioner og bygninger med korrekt Reynolds' tal er næsten umulige at gennemføre i praksis.

Herefter kan alle øvrige skalaforhold udledes. En samlet oversigt findes i Tabel 1.

	Froude's lov	**Reynolds' lov**
Længde (m)	α	α
Areal (m^2)	α^2	α^2
Volumen (m^3)	α^3	α^3
Masse (kg)	α^3	α^3
Tid (s)	$\alpha^{1/2}$	α^2
Frekvens (s^{-1})	$\alpha^{-1/2}$	α^{-2}
Hastighed (m/s)	$\alpha^{1/2}$	α^{-1}
Acceleration (m/s^2)	1	α^{-3}
Kraft (N)	α^3	1
Tryk (N/m^2)	α	α^{-2}
Energi (J)	α^4	α
Effekt (J/s)	$\alpha^{7/2}$	α^{-1}

Tabel 1 *Skalaforhold af forsøgsvariable ved modelforsøg under overholdelse af henholdsvis Froude's og Reynolds' modellove, idet der er forudsat samme strømningsmedium for model og prototype.*

9. Det dybdebaserede Froude-tal

Som ovenfor nævnt var Froude's lov oprindelig et udtryk for, at bølgernes udbredelseshastighed skulle være lig modellens henholdsvis skibets sejlhastighed. På uendelig dybt vand, hvor bølge-udbredelseshastigheden er en funktion af bølgelængden, er det naturligt at benytte skibslængden som den karakteristiske længde. Men på lavere vanddybder er forholdene mere komplicerede. På mellemdybt vand er bølgeudbredelseshastigheden en funktion af både bølgelængden og vanddybden. På meget lavt vand er hastigheden en funktion af vanddybden *d* alene, således at alle bølger udbreder sig lige hurtigt, nemlig med hastigheden

$$c = \sqrt{gd} \tag{16}$$

Ved at indsætte vanddybden *d* i stedet for vandlinjelængden *L* i det almindelige Froude-tal får man det *dybdebaserede* Froude-tal:

$$Fr_d = \frac{V_M}{\sqrt{g_M d_M}} = \frac{V_P}{\sqrt{g_P d_P}} \tag{17}$$

Denne variant af Froude-tallet, som undertiden benævnes *Boussinesq-tallet*, er et mål for, hvor hurtigt fartøjet sejler i forhold til bølgernes udbredelseshastighed ved den pågældende (lave) vanddybde. Det dybdebaserede Froude-tal er et nøgletal i Havelock's (1908) undersøgelser af skibes bølgedannelse på lavt vand, og det har fået ny aktualitet i forbindelse med indførelsen af hurtigfærger i kystnære områder. Bølgedannelsen fra disse skibe afhænger særdeles meget af deres hastighed i forhold til bølgehastigheden. Ved det dybdebaserede Froude-tal

$$Fr_d = 1 \tag{18}$$

er skibets hastighed lig med bølgeudbredelseshastigheden. Dette kaldes *den kritiske hastighed*; lavere hastigheder kaldes *underkritiske*, højere hastigheder kaldes *overkritiske*. Da skibet ved den kritiske hastighed bevæger sig med samme hastighed som samtlige bølgefrekvenser (i modsætning til situationen på dybt vand, hvor kun én frekvens passer med skibets hastighed), kan der akkumuleres meget høje bølger omkring skibet. Af hensyn til kystmiljøet og andre søfarende må man derfor planlægge skibets fart i forhold til rutens varierende vanddybder, sådan at skibet enten sejler overkritisk eller underkritisk, og at det befinder sig i det kritiske hastighedsområde i kortest mulig tid. Der er en tydelig analogi mellem det dybdebaserede Froude-tal i forbindelse med sejlads på lavt vand og Mach-tallet i forbindelse med flyvning ved lydhastighed.

Ved modelforsøg på lavt vand ønsker man at opfylde såvel det almindelige som det dybdebaserede Froude-tal. Der er ikke nødvendigvis en konflikt mellem disse to krav. Hvis modelvanddybden kan skaleres som modellens øvrige lineære skalaforhold, kan begge Froude-tal overholdes samtidig.

10. Keulegan-Carpenter-tallet

I svingende strømninger, som for eksempel bølgebevægelser omkring en offshorekonstruktion, har det vist sig, at Reynolds-tallet ikke er tilstrækkeligt til at karakterisere strømningsformer og kræfter. Dette hænger sammen med, at en svingning med stor amplitude og lav frekvens kan give samme partikelhastighed som en svingning med lille amplitude og høj frekvens, men de to strømningsformer kan give vidt forskellige kræfter på konstruktionen. I det første tilfælde nærmer situationen sig den stationære strømning, som Reynolds-tallet egentlig refererer til, mens man i det andet tilfælde har en situation, hvor strømningen den ene vej næppe kan nå at etablere et stabilt mønster, før retningen vender, og et nyt strømningsmønster skal etableres med modsat fortegn.

For at kunne karakterisere sådanne svingende strømninger definerede G.H. Keulegan og L.H. Carpenter (1958) det såkaldte *Keulegan-Carpenter-tal:*

$$KC = \frac{U_{\max} T}{D} \tag{19}$$

hvor U_{max} er den maksimale strømningshastighed i den uforstyrrede strømning på konstruktionens sted, T er (bølge)perioden, og D er et karakteristisk tværmål på konstruktionen, for en cirkulær cylinder dens diameter. KC-tallet er således, bortset fra en talfaktor, et mål for partikelbanens amplitude i forhold til konstruktionens størrelse, og det har afgørende betydning for størrelsen af strømmodstands- og inertikoefficienterne i Morison's formel.

KC-tallet kan opfyldes samtidig med Froude-tallet i et bølgemodelforsøg, men da vil Reynolds-tallet ikke være opfyldt. Overholdelse af alle tre modeltal i et modelforsøg kan kun finde sted i skala 1:1. Men da bølgekræfter på offshorekonstruktioner har så stor sikkerhedsmæssig og økonomisk betydning, har man for dog at nærme sig denne forsøgstilstand flere steder i verden bygget meget store bølgekanaler, hvor selv de største havbølger kan genskabes i skalaforhold omkring 1:10.

11. Strouhal-tallet

Et andet modeltal af betydning for svingningsfænomener i strømmende medier er *Strouhal-tallet*, som er et modeltal for hvirvelafløsningsfrekvensen bag et fast legeme i strømmen. Man kan også opfatte Strouhal-tallet som forholdet mellem legemets størrelse og hvirvelafstanden i hvirvelalléen bag legemet. Det defineres som:

$$Sr = \frac{f\,D}{U} \tag{20}$$

hvor f er hvirvelafløsningsfrekvensen, D er et karakteristisk tværmål på konstruktionen, for en cirkulær cylinder dens diameter, og U er den lokale uforstyrrede strømningshastighed.

Strouhal-tallet er til en vis grad en funktion af Reynolds-tallet. Og da Reynolds-tallet sjældent kan overholdes i et modelforsøg, vil man generelt heller ikke kunne opnå det korrekte Strouhal-tal.

12. Cauchy-tallet

Cauchy-tallet omhandler forholdet mellem inertikræfter og elastiske kræfter, mere specifikt i denne sammenhæng kræfter på en konstruktion i vand eller luft i forhold til de elastiske kræfter i konstruktionen selv. Cauchy's modeltal defineres som:

$$Cy = \frac{\rho\, U^2}{E} \tag{21}$$

hvor ρ er fluidens massefylde, U er strømningshastigheden, og E er materialets elasticitets-koefficient. I et modelforsøg, der skaleres efter Froude's lov i identiske fluider, vil tælleren i Cauchy-tallet blive skaleret som det lineære skalaforhold. For at få den korrekte elastiske reaktion i modellen må man derfor bygge denne af et tilsvarende blødere materiale end prototypen.

Cauchy-tallet er en vigtig modelparameter ved vindtunnelforsøg med hængebroer og andre bløde bygninger, ved dynamiske forsøg med bevægelige offshorekonstruktioner og ved forsøg med skibe i is.

13. Weber-tallet

Weber-tallet omhandler forholdet mellem inertikræfter og overfladespændingskræfter. Dette forhold har betydning for modelleringen af propellerkavitation, bundslag (slamming) og bølgesprøjt.

Weber's modeltal defineres som:

$$We = \frac{\rho U^2 l}{\sigma} \tag{22}$$

hvor ρ er væskens massefylde, U er strømningshastigheden, l er en karakteristisk længde, og σ er overfladespændingen.

Generelt kan Weber's lov ikke opfyldes sammen med Froude's lov, hvilket er årsagen til, at modelbølger mangler de naturlige bølgers hvide skumtoppe. Dette er dog mest er et optisk problem. Mere alvorligt er den mangelfulde modellering af propellerkavitation ved selvfrem-drivningsforsøg. For at undersøge dette fænomen har man derfor måttet konstruere særlige kavitationstanke, hvor trykket kan reguleres, således at bobledannelsen omkring kaviterende propellerblade kan simuleres i modelskala.

14. Mach-tallet

Mach-tallet angiver forholdet mellem den lokale strømningshastighed U og lydhastigheden c i det strømmende medium. Lydhastigheden er det samme som udbredelseshastigheden af en trykbølge i mediet. Mach-tallet defineres som:

$$Ma = \frac{U}{c} \tag{23}$$

Udover sin indlysende betydning for fly- og raketteknologien har Mach-tallet også relevans for skibs-, offshore- og bygningsforsøg i de tilfælde, hvor trykbølger opstår i vand eller luft. Eksempler herpå er eksplosioner og undervandskommunikation. I forbindelse med bølgestødtryk på offshoreplatforme eller de beslægtede slammingtryk på skibe er Mach-tallet et vigtigt modeltal til beskrivelse af trykbølgerne i vandet og i de luftpuder, der normalt dannes mellem vandover-fladen og konstruktionen, og dermed til skalering af det resulterende tryk.

Mach-tallet har kun betydning, når hastigheder og tryk er så store, at mediets kompressibilitet er af væsentlig betydning. Ved de strømningshastigheder, der er aktuelle i skibs-, offshore- og bygningssammenhæng, kan man, bortset fra ovennævnte specielle fænomener, betragte både luft og vand som usammentrykkelige.

15. Skalaeffekter

Konflikter mellem de forskellige modellove har været nævnt adskillige steder i de foregående afsnit. Generelt kan man i fysiske modelforsøg ikke opnå overholdelse af mere end en eller to modellove. Alle de uopfyldte modellove, som i større eller mindre grad er væsentlige for forsøget, vil da give anledning til de fejl, som kaldes *skalaeffekter*.

Skalaeffekter opstår som en logisk følge af, at naturlovene ikke kan ændres i takt med skalaforholdet. Skalaeffekter må ikke forveksles med de fejl, der opstår på grund af en ufuldstændig fysisk modellering af forsøgsobjektet eller de fysiske omgivelser. De fejl, der skyldes sådanne fejl, for eksempel en forenklet modelkonstruktion, vægeffekter i en vindtunnel eller bølgerefleksioner i et bassin, kaldes derfor *modeleffekter*.

Man kan i et vist omfang korrigere for de uundgåelige skalaeffekter. Dette kan ske rent fysisk ved at ændre modellens egenskaber, således at skalaeffekterne minimeres. Et eksempel herpå er indførelse af ruhedselementer på modellen for at opnå et turbulent grænselag ved en hastighed, hvor det ellers ville være laminart. Et andet eksempel er anvendelse af aktive eller passive mekanismer, der løbende korrigerer de kræfter på modellen, som er mest udsat for skalaeffekter. Endelig kan man ved en omhyggelig efteranalyse af forsøgsresultaterne forsøge at fjerne skalaeffekterne rent beregningsmæssigt. William Froude's metode til ekstrapolation af skibsmodelforsøg er et skoleeksempel på denne sidstnævnte metode.

16. Litteratur

D'Alembert, J.L. (1768): "Paradoxe proposé aux géomètres sur la résistance des fluides", XXXIV Mémoire, pp. 132-138.

Alexander, R. McN. (1976): "Estimates of Speeds of Dinosaurs", Nature, Vol. 261, pp. 129-130.

Bernoulli, D. (1738): "Hydrodynamica", Strasbourg, Basel, 312 pp., 86 figs.

Buckingham, E. (1914): "On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations", Physical Review Letters, Vol. 4, pp. 345-376.

Froude, W. (1868): "Observations and Suggestions on the Subject of Determining by Experiment the Resistance of Ships", Correspondence with The Admiralty, Chelston Cross, December 1868, reprinted in "The Papers of William Froude", The Institution of Naval Architects, London, 1955, pp. 120-128.

Froude, W. (1874): "On Experiments with H.M.S. Greyhound", Transactions of The Institution of Naval Architects, Vol. XV, pp. 36-73.

Hagen, G. (1839): "Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren", Pogg. Ann., Vol. 46, pp. 423-442.

Havelock, T.H. (1908): ”The Propagation of Groups of Waves in Dispersive Media, with Application to Waves on Water produced by a Travelling Disturbance”, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. LXXXI, pp. 398-430.

Hughes, G. (1954): “Friction and Form Resistance in Turbulent Flow, and a Proposed Formulation for use in Model and Ship Correlation”, Transactions of The Institution of Naval Architects, London, Vol. 96, pp. 314-376.

ITTC-1957: “Proceedings of the Eighth International Towing Tank Conference, Madrid, 15-23 September 1957”, printed Madrid, 1959.

ITTC-1978: “Proceedings of the 15th International Towing Tank Conference, The Hague, 3-10 September 1978”, printed Wageningen, 1978.

Keulegan, G.H. & Carpenter, L.H. (1958): “Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid”, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Washington D.C., Vol. 60, No.5, pp. 423-440.

Merrifield, C.W. (1870): “Experiments Recently Proposed on the Resistance of Ships”, Transactions of the Institution of Naval Architects, London, Vol. XI, pp. 80-93.

Navier, M. (1826): “Mémoire sur les lois du mouvement des fluides”, Mémoires de l’Académie des Sciences, printed Paris, 1827, Vol. VI, pp. 389-416.

Poiseuille, J. (1841): “Recherches expérimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres”, Comptes Rendus, Vol. 11, pp. 961-967, Vol. 11, pp. 1041-1048, (1840), Vol. 12, p. 112-115, (1841).

Prandtl, L. (1904): “ÜberFlüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung”, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg, 1904.

Reynolds, O. (1883): “An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water Shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels”, The Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Vol. 174, pp. 935-982.

Schoenherr, K.E. (1932): “Resistance of Flat Surfaces Moving Through a Fluid”, Transactions of The Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York, Vol. 40, pp. 279-313.

Stokes, G.G. (1843): “On Some Cases of Fluid Motion”, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, printed Cambridge, 1847, Vol. VIII.

Stokes, G.G. (1845): “On the Theories of Internal Friction of Fluids in Motion”, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, printed Cambridge, 1847, Vol. VIII, pp. 287-305.
